Das Transformationsprinzip der Trennrohrkaskaden

Von G. Dickel und D. Schildknecht

Aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität München
(Z. Naturforschg. **18 a**, 105—111 [1963]; eingegangen am 12. September 1962)

Herrn Professor Dr. Klaus Clusius *zum 60. Geburtstag gewidmet*

Es wird gezeigt, daß bei der Trennung eines bestimmten Gases im Trennrohr eine zweiparametrige Schar von Cohenschen idealen Trennkaskaden existiert, wenn man gleiche (elektrische) Leistungsaufnahme aller konkurrierender Kaskaden fordert. Die Gesamtheit aller dieser Kaskaden ist in der *Dimensionsgleichung* enthalten, die einen Zusammenhang zwischen Länge, Spaltweite und Kaskadenbreite darstellt, und mittels derer die gesamte Mannigfaltigkeit aller zur Auswahl stehenden Kaskaden übersehen werden kann. Jede einzelne dieser Kaskaden kann durch 3 Größen, die *Invarianten*, charakterisiert werden. Soll zur Trennung eines anderen Gases übergegangen werden und dabei gleichzeitig der optimale Wirkungsgrad erhalten bleiben, dann müssen diese 3 Größen invariant bleiben. Das ist durch geeignete Wahl der Betriebsbedingungen (Druck und Entnahme) möglich.

1. Problemstellung

Ist die Aufgabe gestellt, ein bestimmtes Isotopengemisch im Trennrohr zu trennen, dann macht es keinerlei Schwierigkeiten, nach geeigneter Wahl von Trennrohrlänge und Spaltbreite durch Variation des Arbeitsdruckes die optimale Trenn*schärfe* zu erzielen. Es wird in der Regel auch möglich sein, mit einer bereits vorhandenen Anlage ein beliebiges Isotopengemisch aufzutrennen, und dabei durch Variation des Druckes die optimale Trenn*schärfe* zu erreichen. Bei solcher Arbeitsweise erreicht man aber keineswegs die optimale Trenn*leistung*. Dazu muß man vielmehr die Anlage staffeln, wie Onsager [1] und Cohen [2] gezeigt haben. Man kommt damit zu einer Trennkaskade, die aber nach der üblichen Methode immer nur für ein bestimmtes Gas berechnet und gebaut wird. In der vorliegenden Arbeit haben wir nun das Problem aufgegriffen, ob es möglich ist, eine Trennrohrkaskade so zu bauen, daß sie sich zur Trennung verschiedener Gase bei optimaler Trenn*leistung* eignet.

2. Die allgemeine Trennrohrkaskade

Das allgemeine Prinzip, das zu den Staffelungsbedingungen führt, ist erstmals von Onsager [1] auf Grund der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse vom allgemeinsten Standpunkt her formuliert worden. Es fordert einfach, eine Trennanlage so auszulegen, daß die mit dem Trenneffekt verbundene Entropieerzeugung einen Extremalwert erreicht. Denken wir uns eine planparallele Trennrohrkaskade mit den Koordinaten x, y, z, dann muß, wenn wir die Entropieerzeugung als Funktion dieser Größen mit Σ bezeichnen, das Raumintegral über unsere Kaskadenabmessungen

$$I = \iiint_v \sum [\gamma(x,y,z), \sigma, \varrho, \alpha, D, \eta] \, dx \, dy \, dz \qquad (1)$$

einen Extremalwert annehmen. Wir haben dabei angedeutet, daß Σ eine Funktion der Entnahme, der Konzentration, der Dichte und der gaskinetischen Größen des in Frage stehenden Gases ist. Da aber zu fordern ist, daß alle konkurrierenden Trennrohrkaskaden die gleiche Energieaufnahme W haben sollen, so muß als Nebenbedingung gelten:

$$W(\sigma) = \iiint_v \Omega(\lambda, x, y, z) \, dx \, dy \, dz \qquad (2)$$

wenn Ω die Energiedissipationsfunktion bezeichnen soll. Diese hängt von der Wärmeleitung λ ab. Die Energieaufnahme W kann natürlich willkürlich vorgeschrieben werden, es besteht aber ein Zusammenhang zwischen dieser und der Entnahme σ.

Die allgemeine Lösung dieses Variationsproblems liefert uns ein Extremalfeld im dreidimensionalen Raum, dessen einzelne Extremalen eine Cohensche Kaskade darstellen. Wir wollen aber nicht diese letzteren aufsuchen, sondern die Transversalflächen dieser Extremalenschaar, die in der Fundamentalfunktion des Feldes (Eikonal)

$$\Theta[x, y, z] = \varrho[W(\sigma, \lambda, x, y, z), \varrho, \alpha, D, \eta] \qquad (3)$$

[1] L. Onsager, Phys. Rev. **55**, 1137 [1939].

[2] K. Cohen, The Theory of Isotope Separation, McGraw-Hill, New York 1951.

enthalten sind. Dieser Gleichung entspricht unsere in Abschn. 5 c gebrachte Gl. (35) bzw. (37). Mit dieser vollzieht sich der Übergang zu einem anderen Gas in sehr einfacher Weise. Wir müssen nämlich nur bedenken, daß sich Kaskaden dann zur Trennung verschiedener Gase bei optimalem Wirkungsgrad heranziehen lassen, wenn ihre Extremalfelder bzw. Fundamentalfunktionen bei den verschiedenen Gasen identisch gemacht werden können. Da in Gl. (3) der linker Hand stehende Ausdruck für eine bestimmte Kaskade einen festen Wert hat (x, y und z sind die Kaskadenabmessungen), müssen wir versuchen, die Größe ϱ für die verschiedenen Gase identisch zu machen. Das ist, wie im folgenden noch gezeigt wird, durch Wahl der Arbeitsbedingungen, wenn auch nur im beschränkten Ausmaße, möglich.

Wir werden die Lösung der vorgelegten Aufgabe mit der dem Leser geläufigeren Methode der Maxima einer Funktion mehrerer Variabler lösen. Wenn wir das vorliegende Problem zunächst vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der Extremalfelder her beleuchtet haben, so geschah das deshalb, um dem Leser den Zusammenhang mit der COHENschen Kaskaden-Theorie nahezulegen.

3. Die Grundgleichungen

Wir behandeln das Problem an Hand einer planparallelen Trennrohranordnung, die wir uns zunächst aus einer großen Anzahl sehr kleiner Trennstücke der Länge Δz zusammengesetzt denken. Der Trennspalt sei mit Δx bezeichnet und die Breite derselben mit Δy.

In Abb. 1 ist eine solche schematisch dargestellt, wobei $y(z)$ die zunächst noch unbekannte Breitenfunktion bedeutet. Für ein beliebig herausgegriffenes Trennrohrstück k gilt die fundamentale Transportgleichung [3–6]:

$$\tau_k = \tau_{A,k} - K_k \frac{d\gamma_k}{dz} + \sigma(\gamma_k(z) - \gamma_{k,a}), \tag{4}$$

wobei τ_A den Anfangstransport, K die Rückflußkonstante und σ die Entnahmegeschwindigkeit bedeuten. $\gamma_{k,a}$ bezeichnet die Konzentration der anzureichernden Komponente am eingangsseitigen Ende unseres Trennrohrstückes, $\gamma(z)$ die an einer beliebigen Stelle im Inneren unseres Elementes. Da σ in allen Trennstücken den gleichen Wert besitzt, haben wir hier den Index k weggelassen.

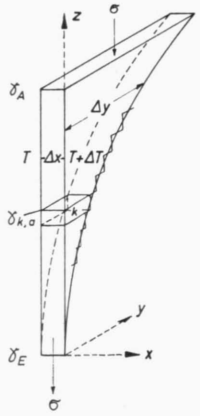

Abb. 1. Kaskadenschema.

Den Zusammenhang zwischen Entnahme und Transport stellen wir jetzt mittels der Kontinuitätsbedingung her. Ist γ_E die Konzentration unserer Komponente in dem am Austrittsende abgezogenen Gas, dann ist der Transport an dieser Komponente durch das von γ_E bis $\gamma_{k,a}$ sich erstreckende Trennrohrendstück

$$\tau_k = \sigma(\gamma_E - \gamma_{k,a}). \tag{5}$$

Dieser Ausdruck besagt, daß die Differenz zwischen der am Trennrohrende abgezogenen und der bei k nachströmenden Menge gleich ist dem Transport τ_k durch unser Trennrohrstück. Dieser Transport muß aber gerade von unserem Trennrohrelement k geliefert werden. Pro Zeiteinheit sind das $n = \tau_k/M$ Mole, wenn M das Molekulargewicht bedeutet und wir den Transport in Gramm pro Zeiteinheit ausdrücken. Damit liefert unser Element die thermodynamische Trennleistung:

$$\Delta E_k = (\tau_k/M)\, R\, T\, \Delta\gamma_k/\gamma_k(1-\gamma_k), \tag{6}$$

wenn $\gamma\Delta_k$ die Konzentrationsdifferenz zwischen den Enden unseres Elements bedeutet.

Ersetzen wir in diesem Ausdruck $\Delta\gamma_k$ durch das aus Gl. (4) zu gewinnende Differential, so erhalten wir bei Berücksichtigung von Gl. (5) und bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\Delta E_k = {} & R\, T\, [K_k\, M\, \gamma_k(1-\gamma_k)]^{-1} \\ & \cdot [\tau_{A,k}\, \sigma(\gamma_E - \gamma_{k,a}) - \sigma^2(\gamma_E - \gamma_{k,a})^2]\, \Delta z_k\,.\end{aligned} \tag{7}$$

[3] R. C. JONES u. W. H. FURRY, Rev. Mod. Phys. **8**, 151 [1946].
[4] W. H. FURRY, R. C. JONES u. W. ONSAGER, Phys. Rev. (2) **55**, 1085 [1939].
[5] L. WALDMANN, Z. Phys. **114**, 53 [1939].
[6] W. G. BERL, Physical Methods in Chemical Analysis IV, Academic Press, New York 1961, S. 267.

Der erforderliche Energieaufwand ist durch den Wärmefluß durch die *Breitseite* des Trennrohres gegeben, und, wenn wir mit ω den Umrechnungsfaktor auf die radiale Anordnung bezeichnen, erhalten wir:

$$W_k = \omega\, \lambda\, \Delta T \cdot (\Delta y_k\, \Delta z_k / \Delta x_k)\,. \tag{8}$$

Den Wirkungsgrad des k-ten Abschnittes definieren wir durch

$$\varepsilon_k = \Delta E_k / W_k\,, \tag{9}$$

und den der Gesamtanlage durch

$$\varepsilon = \sum \Delta E_k / \sum W_k = \sum W_k\, \varepsilon_k / \sum W_k\,. \tag{10}$$

Wir haben nun $\sigma, \tau_{\mathrm{A},k}$, K_k und Δx_k, Δy_k, Δz_k so zu bestimmen, daß ε maximal wird. Dabei sind nicht alle Variable unabhängig voneinander, es gelten vielmehr für $\tau_{\mathrm{A},k}$ und K_k die folgenden Beziehungen [3–6]:

$$\tau_{\mathrm{A},k} = \frac{4}{15}\, \alpha \frac{\Delta T}{T}\, \varrho\, D\, \varphi\, P_\tau\, u_k\, \Delta y_k\, \gamma_k (1-\gamma_k) \equiv \tau^*_{\mathrm{A},k}\, \gamma_k (1-\gamma_k)\,, \tag{11}$$

wobei die Umlaufgröße u durch

$$u = \bar{w}\, \Delta x / D \tag{12}$$

definiert ist, und die darin enthaltene mittlere Umlaufgeschwindigkeit sich aus der Formel:

$$\bar{w} = \frac{g\, \varrho\, \Delta T}{192\, \eta\, T}\, \Delta x^2 \tag{13}$$

berechnet. Die Rückflußkonstante K ist durch den Ausdruck

$$K_k = \varrho\, D\, \Delta x_k (0{,}1\, \psi\, P_K\, u_k^2 + \chi)\, \Delta y_k \tag{14}$$

gegeben. Die Bedeutung der noch zu erklärenden Zeichen ist folgende: T = mittlere Temperatur, ΔT = Temperaturdifferenz im Trennspalt und g = Erdbeschleunigungskonstante. Die Größen φ, ψ und χ sind die Umrechnungsfaktoren [3, 7] von der vorliegenden planparallelen Anordnung auf eine später ins Auge gefaßte radiale Kaskade und P_τ und P_k die Korrekturfaktoren für die parasitären Strömungen [8, 9]. Diese sind nur wenig von eins verschieden.

Wir suchen zunächst das Maximum in bezug auf die Entnahme σ. Da die W_k unabhängig von σ sind, genügt es ΔE_k zum Maximum zu machen. Durch Differentiation von Gl. (7) erhalten wir die Maximalbedingung:

$$\sigma(\gamma_{\mathrm{E}} - \gamma_{k,\mathrm{a}}) = \tfrac{1}{2}\, \tau_{\mathrm{A},k}\,. \tag{15}$$

Da der linker Hand stehende Ausdruck wegen (5) einfach den Transport τ darstellt, so besagt diese Gleichung, daß das Maximum des Wirkungsgrades dann erreicht wird, wenn der Transport an jeder Stelle gleich der Hälfte des Anfangstransportes ist [1, 2]. Wir schreiben diese Gleichung noch in einer anderen, später benötigten Form:

$$\frac{\sigma}{K_k}\, \frac{K_k}{\tau_{\mathrm{A},k}}\, (\gamma_{\mathrm{E}} - \gamma_{k,\mathrm{a}}) = \frac{1}{2}\,. \tag{16}$$

Setzen wir Gl. (11), (14) und (15) in Gl. (7) ein, so erhalten wir:

$$\Delta E_k = \frac{R\, T}{M} \left(\frac{2}{15}\, \alpha \frac{\Delta T}{T}\right)^2 D\, \varrho\, \frac{(u_k\, \varphi\, P_\tau)^2}{0{,}1\, u_k^2\, \psi\, P_k + \chi}\, \gamma_k (1-\gamma_k)\, \frac{\Delta y_k\, \Delta z_k}{\Delta x_k} \tag{17}$$

und für den Wirkungsgrad eines kleinen Trennrohrelementes:

$$\varepsilon_k = \frac{R\, T}{M} \left(\frac{2}{15}\, \alpha \frac{\Delta T}{T}\right)^2 \frac{\varrho\, D}{\omega\, \lambda\, \Delta T}\, \frac{(u_k\, \varphi\, P_\tau)^2}{0{,}1\, u_k^2\, \psi\, P_k + \chi}\, \gamma_k (1-\gamma_k)\,. \tag{18}$$

Wir sehen, daß dieser Ausdruck nur noch u_k als freie Variable enthält. Das Maximum bezüglich dieser Größe liegt aber im Unendlichen. Wählt man

$$u^2 \gg \frac{10\, \chi}{\psi\, P_K} \sim 10\,, \tag{19}$$

so erhält man praktisch das absolute Maximum, andernfalls nur das relative.

Die Bedingungen (15) und (19) sind also hinreichend für den maximalen Wirkungsgrad eines kurzen Trennrohrstückes. Daß sie auch hinreichend sind für den maximalen Wirkungsgrad der gesamten Kaskade [Gl. (10)], werden wir in Abschn. 7 noch zeigen.

[7] H. JENSEN u. L. WALDMANN, Naturwiss. **29**, 467 [1941].

[8] G. DICKEL u. A. BÜRKHOLZ, Z. Naturforschg. **16 a**, 760 [1961].

[9] G. DICKEL, Z. Naturforschg. **16 a**, 755 [1961].

Neben den obigen Gleichungen für den Wirkungsgrad benötigen wir im folgenden die aus Gl. (4) und (5) unter Berücksichtigung von Gl. (11) entstehende Trennrohrgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_k}{\mathrm{d}z} - \frac{\tau^*_{\mathrm{A},k}}{K_k}\gamma_k(1-\gamma_k) + \frac{\sigma}{K_k}(\gamma_{\mathrm{E}}-\gamma_k) = 0\,. \tag{20}$$

Die Koeffizienten $\tau^*_{\mathrm{A},k}/K_k$ und σ/K_k dieser Differentialgleichung in γ sind für jedes Trennrohrelement verschieden. Gehen wir zu unendlich kleinen Stufen über, dann können wir die Koeffizienten als stetige Funktionen von z auffassen, und schreiben jetzt:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} - \frac{\tau^*_{\mathrm{A}}(z)}{K(z)}\gamma(z)\,(1-\gamma(z)) + \frac{\sigma}{K(z)}(\gamma_{\mathrm{E}}-\gamma(z)) = 0\,. \tag{21}$$

Den analogen Übergang denken wir uns auch an den Gl. (8), (9), (10), (16), (17) und (18) vollzogen, und fassen im folgenden diese Gleichungen als Funktionen von z auf.

4. Die Invarianzbedingungen

In den Koeffizienten τ^*_{A}/K, σ/K und γ_{E} der Gl. (16) und (21) sind die individuellen Eigenschaften eines jeden Gases enthalten. Wenn es nun möglich ist, die drei Koeffizienten so festzulegen, daß sie für alle in Frage kommenden Gase die gleichen Werte annehmen, dann liefert uns die Lösung von Gl. (21) eine universelle, für alle Gase gültige Konzentrationsverteilungsfunktion. Außerdem ist dann auch die Maximalbedingung (16) invariant. Die Bedingungen hierfür lauten, wenn wir die verschiedenen Gase durch die Indizes $i = 1, 2, \ldots, n$ charakterisieren:

$$(K/\tau^*_{\mathrm{A}})_1 = (K/\tau^*_{\mathrm{A}})_2 = \ldots = (K/\tau^*_{\mathrm{A}})_n = L(\alpha, \eta, \Delta x)\,, \tag{22}$$

$$(\sigma/K)_1 = (\sigma/K)_2 = \ldots = (\sigma/K)_n = S(D, \sigma, \eta, \Delta x, \Delta y)\,, \tag{23}$$

$$(\gamma_{\mathrm{E}})_1 = (\gamma_{\mathrm{E}})_2 = \ldots = (\gamma_E)_n = \gamma_{\mathrm{E}}\,. \tag{24}$$

Die Bedingung (23) läßt sich durch Wahl eines geeigneten Wertes von σ_i in einfacher Weise erfüllen. Auch die Bedingung (24), d. h. Gleichheit der Endkonzentrationen $(\gamma_{\mathrm{E}})_i$ ist klar. Sie wird erfüllt, wenn man am Eintrittsende die Gase mit derselben Ausgangskonzentration zuführt, oder aber die Kaskade entsprechend verlängert oder verkürzt. Die Bedingung (22) nimmt durch Anwendung von Gl. (11) und (14) die folgende Form an:

$$\frac{\Delta x}{\frac{4}{15}(\Delta T/T)\,\varphi\,P_\tau}\left[\frac{0{,}1\,\psi\,P_K\,u^2+\chi}{u\,\alpha}\right]_i = L\,. \tag{25}$$

Ist insbesondere Gl. (19) erfüllt, dann kann man hierfür praktisch schreiben:

$$\frac{1{,}5\,T\,\psi\,P_K}{4\,\Delta T\,\varphi\,P_\tau}\,\Delta x\left[\frac{u}{\alpha}\right]_i = L\,. \tag{26}$$

Die Umlaufgröße u muß demnach bei den verschiedenen Gasen proportional dem Trennfaktor α gewählt werden. Wie man den vorgeschriebenen u-Wert erhält, werden wir im Abschn. 6 behandeln. Die anderen, vor der eckigen Klammer in Gl. (26) stehenden Größen sind feste Konstanten für ein und dasselbe Trennrohr.

5. Die Kaskadendimensionen

a) Länge und Breite der Kaskade

Unter ausdrücklicher Beschränkung auf Kaskaden optimaler Trennleistung erhalten wir für die Konzentrationsverteilung in der z-Richtung aus Gl. (15) und (21) die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^*_{\mathrm{A}}}{K}\,\gamma(1-\gamma)\,. \tag{27}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert unter Berücksichtigung von Gl. (22) und der vorgeschriebenen Randbedingung $\gamma = \gamma_{\mathrm{E}}$ für $z = 0$ den bekannten Ausdruck

$$z/2\,L = \ln\frac{\gamma_{\mathrm{E}}(1-\gamma(z))}{\gamma(z)\,(1-\gamma_{\mathrm{E}})} \equiv n\,. \tag{28}$$

Für die im folgenden noch benötigte Konzentrationsverteilungsfunktion ergibt sich der Ausdruck

$$\gamma(z) = \gamma_{\mathrm{E}}\,[\,(1-\gamma_{\mathrm{E}})\exp(z/2\,L) + \gamma_{\mathrm{E}}]^{-1}. \tag{29}$$

Setzen wir in die Maximalbedingung (16) für τ^*_{A} den Wert aus Gl. (11) ein, dann erhalten wir bei der Auflösung nach Δy und Berücksichtigung von

Gl. (29) den Ausdruck

$$\Delta y = \sigma \left[\frac{2}{15}\alpha \frac{\Delta T}{T} D \varrho \varphi P_\tau\right]^{-1} \cdot \frac{1}{u}\left[\operatorname{Sin}(z/2L) + 2\Delta(1 - \operatorname{Cos}(z/2L))\right]. \quad (30)$$

Dabei bedeutet $\Delta = \gamma_E - 0{,}5\,.$ (31)

b) *Die Invariantengleichung*

Unter Berücksichtigung von Gl. (11), (22), (23) und (29) erhalten wir aus Gl. (16) die wichtige Invariantengleichung

$$L S P = \tfrac{1}{2}, \quad (32)$$

wobei für P wegen Gl. (28) gilt

$$P = \operatorname{Sin} n + 2\Delta(1 - \operatorname{Cos} n). \quad (33)$$

Setzt man in Gl. (32) Gl. (22) und (23) ein und berücksichtigt Gl. (11), so erhält man daraus, wenn man nach u auflöst:

$$u = 2P \frac{\sigma}{\varphi P_\tau \Delta y}\left[\frac{4}{15}\alpha \frac{\Delta T}{T}\varrho D\right]^{-1}. \quad (34)$$

c) *Die Dimensionsgleichung*

Setzen wir Gl. (34) in die durch Gl. (22) substituierte Gl. (28) ein, so erhalten wir nach Umstellung

$$\frac{\Delta y(\gamma_E,\gamma)\, z(\gamma_E,\gamma)}{\Delta x} = 0{,}1[\sigma n P] \cdot \left[\left(\frac{2}{15}\alpha\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \varrho D\right]^{-1}\left[\frac{\psi P_K}{(\varphi P_\tau)^2}\right] C \quad (35)$$

mit $C = 1 + \chi[0{,}1\,\psi\; P_K u^2]^{-1}.$ (36)

Da im allgemeinen die Bedingung (19) erfüllt ist, kann C praktisch gleich eins gesetzt werden. Die Funktion (35) entspricht der Fundamentalfunktion des Feldes Gl. (3). Daß sie λ nicht mehr enthält, ist durch Gl. (42) bedingt. Sie stellt die Parameterdarstellung von y und z mit γ als frei wählbaren Parameter dar, denn γ_E ist fest (Invariante). Demgemäß müssen bei allen durch unsere Fundamentalfunktion Gl. (35) charakterisierten Kaskaden alle Gase mit der Konzentration γ_E entnommen werden. Man übersieht die Mannigfaltigkeit aller in dieser enthaltenen Kaskaden am besten, wenn wir diese durch ihre festen Werte γ_A und γ_E an den Kaskaden-Enden charakterisieren. Setzen wir dann $Z = z(\gamma_A, \gamma_E)$, $Y = y(\gamma_A, \gamma_E)$, dann stehen, wenn man bedenkt, daß σ durch die vorgeschriebene Energieaufnahme [s. Gl. (2)] festgelegt ist und $\varrho \cdot D$ konstant ist, rechter Hand nur noch konstante Werte. Wir erhalten dann die Gleichung der Endtransversalfläche

$$Y\, Z/\Delta x = \text{const}, \quad (37)$$

die man sich durch eine Hyperbelschar mit Δx als Parameter veranschaulichen kann. Auf ihr endet eine 2-dimensionale Schar optimal arbeitender Kaskaden. Die Konstante in Gl. (37), die wir als Dimensionsgleichung bezeichnen wollen, hängt nach Gl. (35) von der gewünschten Trennleistung, von den Eigenschaften des Gases und von den Umrechnungs- und Störungsfaktoren ab. Wollen wir jetzt zu einem anderen Gas übergehen, dann müssen wir nur fordern, daß diese Konstante für das neue Gas den gleichen Wert besitzt. In Gl. (37) tritt uns das Transformationsprinzip der Kaskaden in einer sehr anschaulichen und einfachen Weise entgegen.

Wir müssen noch bemerken, daß Gl. (37) für jeden Punkt y und z unserer Kaskade gilt, wobei die Konstante ihren Wert ändern muß. Jede dieser Flächen ist eine Transversalfläche unserer Extremalenschar, von denen jede zu einem bestimmten Parameterwert γ gehört. Diese Parameterdarstellung ist eben gerade Gl. (35). Das eben Gesagte gilt sinngemäß auch für Gl. (32). L ist zwar Konstante, S und P sind Funktionen des Parameters γ.

Die Formel (37) liefert uns zunächst eine unbeschränkte Menge von Kaskaden. Es bestehen aber einschränkende Bedingungen, die wir im folgenden noch erläutern müssen.

6. Die Arbeitsbedingungen

a) *Wahl der Umlaufgröße*

Die zuvor erwähnte Beschränkung der Kaskadenmenge ist dadurch bedingt, daß die u-Werte, die der GRASSHOFschen Zahl entsprechen, einer Beschränkung unterworfen sind. Die obere Grenze ist durch den Einsatz der Turbulenz gegeben, die bei $u = 20$ eintritt [8], die untere durch die Bedingung (19). Während die obere Grenze scharf ist, ist die untere Grenze dehnbar, weil nach dieser Seite hin der Wirkungsgrad langsam abnimmt. In der Praxis wird man die Kaskadenmenge durch $20 > u > 10$ begrenzen.

Wir müssen jetzt versuchen, in Gl. (37) als neue Variable die Größe u einzuführen. Das gelingt mittels Gl. (34) und liefert

$$\frac{Z}{\Delta x \cdot u} = 0{,}1\, n(\gamma_A, \gamma_E)\left[\frac{2}{15}\alpha\frac{\Delta T}{T}\right]^{-1}\frac{\psi P_K}{\varphi P_\tau} C. \quad (38)$$

Mittels dieser Gleichung werden wir fortan unsere Kaskadenberechnung durchführen. Als Freiheiten fassen wir jetzt das Verhältnis $Z/\Delta x$ und die Größe u auf.

b) Wahl des Arbeitsdruckes

Den gewünschten u-Wert kann man durch geeignete Wahl des Arbeitsdruckes realisieren. Man sieht das ein, wenn man in Gl. (12) die Gl. (13) einsetzt, die gaskinetische Beziehung

$$D = f\,\eta/\varrho \tag{39}$$

berücksichtigt und ϱ durch das Gasgesetz ausdrückt. Man erhält dann

$$p = \left[\frac{192\,R^2\,T^2}{g\,\Delta T}\left(\frac{f\,\eta^2}{M^2}\right)_i\right]^{1/2}\frac{u^{1/2}}{\Delta x^{3/2}}\,. \tag{40}$$

Man kann bei festgelegtem u noch über Δx frei verfügen und so zu einem günstigen Arbeitsdruck gelangen. Da andererseits der Druck in einer Kaskade überall gleich ist, müssen wir den Abstand Δx auch konstant lassen, es sei denn, daß wir die Kaskade mit verschiedenen u-Werten betreiben wollen, was im allgemeinen aber unzweckmäßig ist.

7. Die Energiebilanz

a) Trennleistung und Energieaufwand

Bei den folgenden Berechnungen wollen wir uns auf konstante Δx-Werte beschränken. Die thermodynamische Trennleistung der gesamten Kaskade erhalten wir, wenn wir in Gl. (17) die sich aus Gl. (11) und (16) ergebende Breitenfunktion einsetzen und Gl. (29) berücksichtigen. Wir erhalten dann nach Durchführung der Integration über z und Anwendung von Gl. (25) und (28) als Ausdruck für die Trennleistung:

$$E = \frac{\sigma}{M}\,R\,T\left[\gamma_{\mathrm{E}}\ln\frac{\gamma_{\mathrm{E}}}{\gamma_{\mathrm{A}}} + (1-\gamma_{\mathrm{E}})\ln\frac{1-\gamma_{\mathrm{E}}}{1-\gamma_{\mathrm{A}}}\right]. \tag{41}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir den gesamten Energieaufwand durch Integration von Gl. (8). Unter Berücksichtigung von Gl. (29), (30) und der gaskinetischen Beziehung [10]

$$\lambda/(\eta\,c_v) = k; \quad (1{,}9 < k < 2{,}5) \tag{42}$$

erhalten wir:

$$Q = \sigma\,\frac{T^2}{\Delta T}\cdot\left[\frac{2}{15}\,\alpha\right]^{-2}\frac{k}{f}\,c_v\,\omega\,\frac{0{,}1\,u^2\,\psi\,P_K+\chi}{(u\,\varphi\,P_\tau)^2}\left[\mathrm{Cos}\,N + 2\,\Delta\,(N-\mathrm{Sin}\,N) - 1\right]. \tag{43}$$

b) Der Wirkungsgrad

Für den Wirkungsgrad der gesamten Staffelanlage erhalten wir aus Gl. (10) nach Anwendung von Gl. (8) und Übergang zum Integral:

$$\varepsilon = \frac{R\,\Delta T}{M\,T}\left[\frac{2}{15}\,\alpha\right]^2\frac{D\,\varrho}{\lambda}\,\frac{(u\,\varphi\,P_\tau)^2}{\omega\,(0{,}1\,u^2\,\psi\,P_K+\chi)}\,\frac{\int_0^Z \Delta y\,\gamma(1-\gamma)\,\mathrm{d}z}{\int_0^Z \Delta y\,\mathrm{d}z}\,. \tag{44}$$

Die Größen Δy und γ sind aber keine freien Variablen mehr, sondern hängen wegen der Gültigkeit von Gl. (15) bzw. (16) gemäß Gl. (29) und Gl. (30) von z ab. Demgemäß existiert auch kein Maximum bezüglich einer weiteren Größe mehr und wir erhalten nach Durchführung der Integration:

$$\varepsilon = \frac{R\,\Delta T}{M\,T}\left[\frac{2}{15}\,\alpha\right]^2\frac{f}{k\,c_v}\,\frac{(u\,\varphi\,P_\tau)^2}{\omega\,(0{,}1\,u^2\,\psi\,P_K+\chi)}\,\frac{\gamma_{\mathrm{E}}\ln(\gamma_{\mathrm{E}}/\gamma_{\mathrm{A}}) + (1-\gamma_{\mathrm{E}})\ln[(1-\gamma_{\mathrm{E}})/(1-\gamma_{\mathrm{A}})]}{\mathrm{Cos}\,N + 2\,\Delta\,(N-\mathrm{Sin}\,N) - 1}\,. \tag{45}$$

Alle von uns in Betracht gezogenen Kaskaden haben also denselben Energieaufwand und Wirkungsgrad. Das ist aber nur der Fall, solange die Gl. (19) erfüllt ist. In der Praxis wird sich die letztere Bedingung nicht immer erfüllen lassen, insbesondere, wenn man zur Trennung eines anderen Gases übergeht. Dann muß man die Anlage entsprechend dem Wert der in Gl. (36) hinzukommenden Konstanten C vergrößern und den damit verbundenen erhöhten Energieaufwand in Kauf nehmen.

8. Praktische Beispiele

Wir geben zum Schluß noch ein Beispiel zur Berechnung einer Anlage zur Anreicherung des ^{18}O von 0,2% auf 50%. Gl. (38) liefert die numerische Form $Z/\Delta x = 793\,u$. Setzen wir $u = 20$, so erhalten wir die in der Tabelle aufgeführten Werte. Die in der dritten Spalte aufgeführten Werte von p sind

10 A. EUCKEN, Lehrbuch der chemischen Physik II, Akad. Verlagsges., Leipzig 1943, S. 323.

mittels Gl. (40) berechnet. Wir wählen jetzt für die Weiterrechnung die Hochdruckkaskade Nr. 4 und berechnen mittels Gl. (22) $L = 63{,}8$.

Nr.	x (cm)	z (m)	p (atm)	ε
1	1,5	238	0,56	$4{,}12 \cdot 10^{-9}$
2	0,7	111	1,75	
3	0,1	15,9	32,4	
4	0,05	7,9	92	
5	0,01	1,6	1025	

Tab. 1. Dimensionen einer Trennkaskade zur ^{18}O-Trennung.

Die Beziehungen Gl. (32) und (33) liefern $S = 3{,}14 \cdot 10^{-5}$. Für die Berechnung von Y liefert die Gl. (34) $Y = 3{,}12 \cdot 10^2\,\sigma$, wenn σ in g/Tag gerechnet wird. Y ist demnach ein dritter Freiheitsgrad. Dieser kommt einfach dadurch herein, daß die Leistungsaufnahme bzw. die Entnahme willkürlich festgelegt werden kann. Wählen wir $\sigma = 0{,}032$ g/Tag, was einem theoretischen Leistungsaufwand von etwa 70 kWh/Tag entspricht, dann errechnet sich die in Abb. 2 dargestellte Kaskadenbreite.

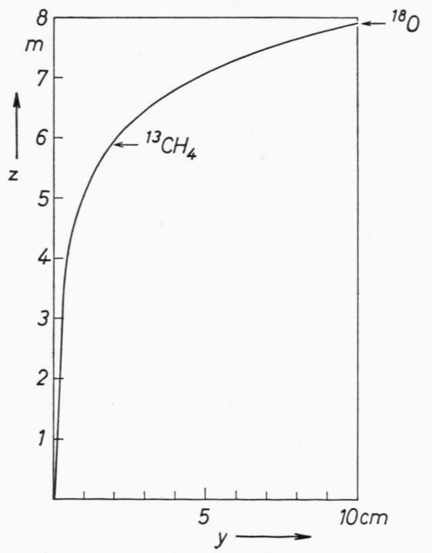

Abb. 2. Kaskadenbegrenzungsfunktion.

Diese Kaskade läßt sich auch zur Trennung von $^{13}CH_4$ heranziehen, da hierfür aus der Invarianten L $u = 11$ folgt. Dabei muß die Kaskade verkürzt werden bzw. das Ausgangsgas an der in Abb. 2 eingezeichneten Stelle eingeführt werden. Beim Stickstoff liegen die Verhältnisse ungünstiger, da hier die Invariante einen u-Wert von etwa 7 fordert. Damit würde also Stickstoff außerhalb des Bereichs unserer Kaskade liegen. Wenn wir jedoch eine 20-proz. Vergrößerung der Dimensionskonstanten in Gl. (37) mit in Kauf nehmen, können wir diese Kaskade auch dazu verwenden, zumal sie in ihrer Länge ausreicht. Nicht trennbar sind dagegen Gase, die eine größere Thermodiffusionskonstante als der Sauerstoff besitzen, weil wir dann in den Bereich der Turbulenz kommen. Diese Aussage ist natürlich nur insofern richtig, als wir die Bedingung optimalen Wirkungsgrades aufrecht erhalten wollen.

Die berechnete ideale Kaskade muß dann erst noch durch geeignete Rohrstücke zu einer treppenförmig gestaffelten Kaskade angenähert werden. Im vorliegenden Falle würde man konzentrischen, auf der Drehbank bearbeiteten Rohrstücken den Vorzug geben. Die Staffelung selbst wird man am zweckmäßigsten auf graphischem Wege aus der idealen Kaskadenbegrenzung gewinnen.

9. Schlußbetrachtung

Zum Schluß soll noch die Frage erörtert werden, inwieweit sich bei anderen Trennverfahren auch eine Dimensionsgleichung aufstellen läßt, mit anderen Worten, inwieweit es hier ebenfalls eine Mannigfaltigkeit optimal arbeitender Trennkaskaden gibt. Da das eingangs gestellte Variationsproblem grundsätzlich für solche Trennverfahren formuliert werden kann, bei denen ein Entropieerzeugungseffekt im Sinne der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse auftritt, folgt aus der Existenz eines Extremalfeldes auch die einer Fundamentalfunktion bzw. einer Dimensionsgleichung. Invarianten werden sich dazu im allgemeinen immer finden lassen, inwieweit aber die Invarianzbedingungen auch in der Praxis erfüllt werden können, bedarf einer speziellen, für das jeweilige Trennverfahren charakteristischen Erörterung. Wir werden darauf an anderer Stelle im Rahmen einer allgemeinen auf der Extremalfeldtheorie fundierten Kaskadentheorie zurückkommen.